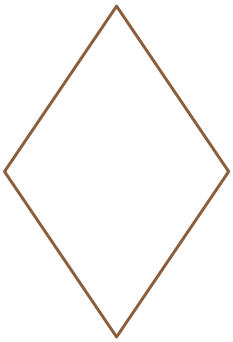
درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته آموختید که دیدن و استفاده از حواس یا ارائهٔ مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعاتِ مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است، برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

فعالیت



۱ــ به گفت‌وگوی زیر توجه کنید :

مهرداد : آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

سعید : بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید :

فرض : شکل لوزی است.

حکم : _____ برابر است.

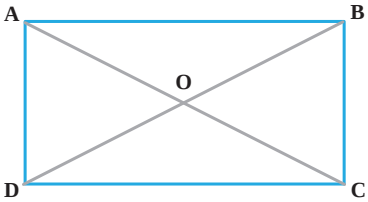
استدلال :

در لوزی زاویه‌های روبه‌رو _____ $\Rightarrow$ { لوزی نوعی _____ است. / در متوازی‌الاضلاع _____ برابر است. }

۲ــ اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئلهٔ زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید :

فرض : ABCD مستطیل است.

حکم : قطرهای مستطیل، مساوی است.



حکم : AC= _____

فرض و دانسته‌های قبلی :

$\hat{A}$ = _____ = _____ = _____ =۹۰

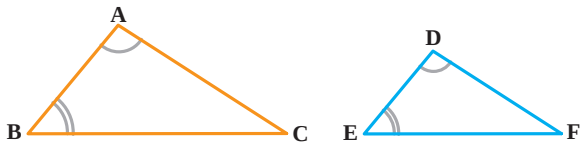
AD= _____ , AB = _____

AB|| _____ , AD|| _____

کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

۱ــ در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



حکم : _____ = _____

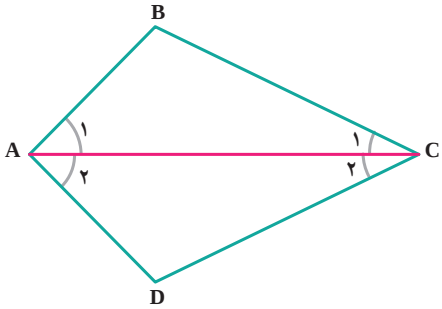
فرض : _____ = _____

_____ = _____

۲ــ اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر. (ابتدا شکل را رسم کرده و نام‌گذاری کنید).

۳ــ نشان دهید در هر مثلث اندازهٔ هر زاویه خارجی با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن برابر است.

فعالیت



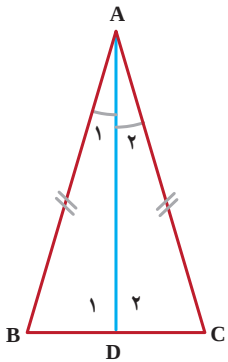
۱ــ در مسئلهٔ زیر، فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید، سپس استدلال درستی برای آن بنویسید.

مسئله : در شکل مقابل پارخط AC نیمساز زاویهٔ A است و اضلاع AB و AD برابرند. ثابت کنید مثلث‌های مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ADC}$ هم‌نهشت‌اند.

فرض : **حکم:**

استدلال : چون AC نیمساز است، داریم $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ و از طرفی AC نیز ضلع مشترک در هر دو مثلث است، لذا دو مثلث ABC و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (زض‌ز) هم‌نهشت‌اند.

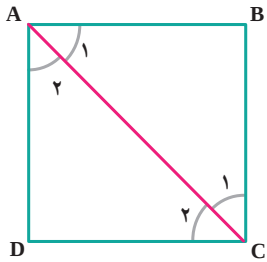
۲ــ مثلث زیر متساوی‌الساقین و AD نیمساز وارد بر قاعدهٔ آن است. با استدلال زیر نشان داده‌ایم که نیمساز وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد.



$$\left.\begin{array}{ll} AB = AC & \text{(ساق‌های برابر)} \\ A_۱ = A_۲ & \text{(AD نیمساز است)} \\ AD = AD & \text{(ضلع مشترک)} \end{array}\right\} \Rightarrow ABD \cong ACD \Rightarrow BD = CD \quad \text{(ض ز ض)}$$

لذا نقطهٔ D وسط BC است و AD میانه است.

آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویهٔ B نیز میانهٔ ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد؟

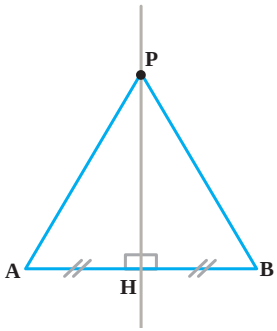


۳ــ با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع هم‌نهشت‌اند و زوایای متناظر با هم برابرند؛ بنابراین $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$ و $\hat{C}_۱ = \hat{C}_۲$ و لذا AC نیمساز است.

آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

۴ــ به‌نظر شما چرا در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود؛ اما در فعالیت ۳ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به‌کار برده‌ایم، در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همهٔ عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.



۵ــ نقطه‌ای مانند P، روی عمودمنصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت‌اند، نتیجه می‌گیریم پاره‌خط‌های PA و PB با هم برابر است.

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P، که روی عمودمنصف پاره‌خط AB است، از دو سر پاره‌خط AB یکسان‌اند.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجهٔ بالا برای «هر» نقطهٔ روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟

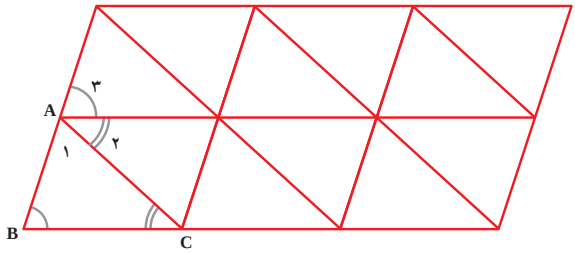
کار در کلاس

به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر آورده‌اند :

مسئله : مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰° است.

استدلال حامد : حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه ۶۰° است، مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰° است.

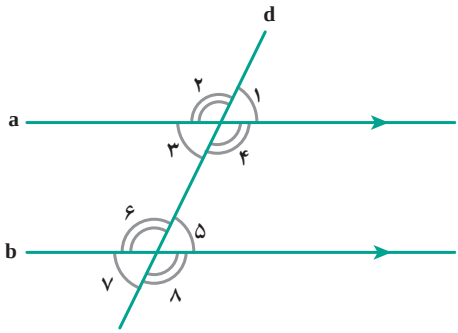
استدلال حسین : حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همهٔ آنها مجموع زوایای داخلی برابر ۱۸۰° است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.



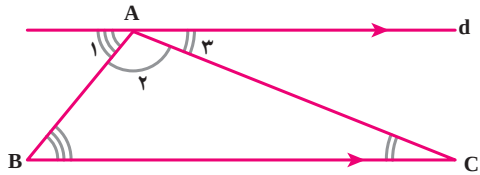
استدلال مهدی : مهدی شکل روبرو را، که از مثلث‌های هم‌نهشت تشکیل شده است کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC مانند شکل

استدلالی با استفاده از شکل به‌صورت زیر آورد :

$$\hat{A}_۱+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۱+\hat{A}_۳+\hat{A}_۲=۱۸۰^\circ$$



استدلال رضا : رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند، با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی‌اند».



حال مثلثی دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ را درنظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویهٔ تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویهٔ $A_۲$ همان زاویهٔ A در مثلث است و با درنظر گرفتن AB به‌عنوان مورّب داریم : $\hat{B}=\hat{A}_۱$ و با درنظرگرفتن AC به‌عنوان مورب داریم : $\hat{C}=\hat{A}_۳$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۳$ به‌ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی مرتّب و خلاصه کرد و بدین‌صورت نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AB\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۱ \\ \left.\begin{array}{l}d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AC\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}=\hat{A}_۳\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ$$

دربارهٔ معتبر بودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید.

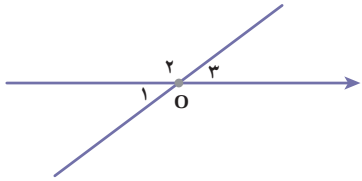
فعالیت

مسئله : حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به‌نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

بین استدلالی که برای مسئلهٔ قبل و مسئلهٔ بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟

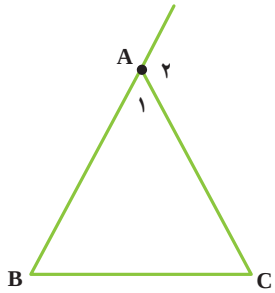
مسئله : نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابرند.

فرض کنیم $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم :



$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_1+\hat{O}_2=180^\circ\\ \hat{O}_3+\hat{O}_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_1+\hat{O}_2=\hat{O}_3+\hat{O}_2\Rightarrow \hat{O}_1=\hat{O}_3$$

تمرین



۱ــ آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

مسئله : در هر مثلث، اندازهٔ زاویهٔ خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

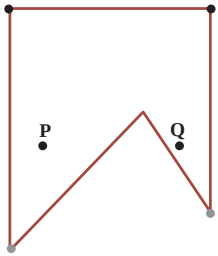
اثبات : مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را درنظر می‌گیریم.

می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و زوایای $\hat{A}_1$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام 60° است؛ بنابراین

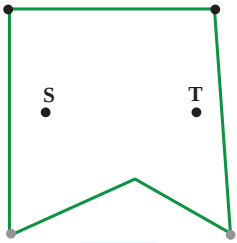
$$\hat{A}_1+\hat{A}_2=180\rightarrow \hat{A}_2=180-\hat{A}_1=180-60=120$$

$$\hat{B}+\hat{C}=60+60=120 \qquad \Rightarrow \hat{A}_2=\hat{B}+\hat{C}$$

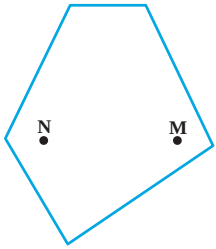
۲ــ در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است؛ اگر هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواهِ درون آن چندضلعی را به‌هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» هر ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص‌های سه دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند، با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.



نرگس : چند ضلعی مقابل محدب نیست؛ زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد.



مهدیه : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.



مریم : چندضلعی مقابل محدب است؛ زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند، نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.

۳ــ آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است. / چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. $\Leftarrow$ ABCD مستطیل است.

ب) در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند. / ABCD مربع نیست. $\Leftarrow$ همهٔ ضلع‌های ABCD، با هم برابر نیستند.

ج) در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند. / در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند. $\Leftarrow$ ABCD مربع نیست.

۴ــ ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

یادآوری : فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.

راهنمایی : یک زاویهٔ دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصلهٔ این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس دلیل آن‌را که این نتیجه برای همهٔ نقاطِ روی نیمساز درست است، بیان کنید.